अध्याय 14

सांख्यिकी और प्रायिकता

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

सांख्यिकी

'सांख्यिकी' का अर्थ, प्राथमिक और गौण आँकड़े, यथाप्राप्त/अवर्गीकृत आँकड़े। आँकड़ों का परिसर (परास), वर्गीकृत आँकड़े – वर्ग अंतराल, वर्ग चिह्न, आँकड़ों का प्रस्तुतीकरण – बारंबारता बंटन सारणी, विच्छिंद (असतत) बारंबारता बंटन तथा सतत बारंबारता बंटन।

- *आँकड़ों का आलेखीय निरूपण*
  - (i) दंड आलेख
  - (ii) एक समान चौड़ाई तथा असमान चौड़ाई वाले आयतचित्र
  - (iii) बारंबारता बहुभुज
- *केंद्रीय प्रवृति के मापक*
  - **(a) माध्य**
  - (i) यथाप्राप्त आँकड़ों का माध्य

$$\text{माध्य} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \text{ जहाँ}$$

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, n प्रेक्षण हैं।

(ii) अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्य

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

जहाँ f_i , x_i की बारंबारताएँ हैं।

(b) माध्यक

माध्यक आँकड़ों का वह मान है जो आँकड़ों को दो बराबर भागों में बाँटता है, जब कि आँकड़ों को आरोही (या अवरोही) क्रम में व्यवस्थित कर लिया गया है।

माध्यक का परिकलन

जब आँकड़ों को आरोही (या अवरोही) क्रम में व्यवस्थित कर लिया गया है, तो इन आँकड़ों का माध्यक निम्नलिखित प्रकार से परिकलित किया जाता है :

(i) जब प्रेक्षणों की संख्या (n) विषम है, तो माध्यक $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{वाँ}}$ प्रेक्षण होता है।

(ii) जब प्रेक्षणों की संख्या (n) सम है, तो माध्यक $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{वें}}$ और $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{वें}}$ प्रेक्षणों का औसत या माध्य होता है।

(c) बहुलक

वह प्रेक्षण जो अधिकतम बार आता है, अर्थात् अधिकतम बारंबारता वाला प्रेक्षण **बहुलक** कहलाता है। अवर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक प्रेक्षित/देख कर ही निर्धारित किया जा सकता है।

प्रायिकता

- यादृच्छिक (या यदृच्छ) प्रयोग या केवल एक प्रयोग
- एक प्रयोग के परिणाम
- एक प्रयोग के अभिप्रयोग का अर्थ
- एक घटना E की प्रायोगिक (आनुभविक) प्रायिकता जिसे P(E) से व्यक्त करते हैं, निम्नलिखित से दी जाती है:

$$\text{P(E)} = \frac{\text{अभिप्रयोगों की संख्या जिनमें घटना घटित हुई है}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

- घटना E की प्रायिकता 0 से 1 तक कोई भी संख्या हो सकती है। विशेष स्थितियों में यह 0 या 1 भी हो सकती है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए –

प्रतिदर्श प्रश्न 1: गणित के एक टेस्ट में 17 विद्यार्थियों द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंक नीचे दिए गए हैं:

91, 82, 100, 100, 96, 65, 82, 76, 79, 90, 46, 64, 72, 68, 66, 48, 49.

इन आँकड़ों का परिसर है:

(A) 46 (B) 54 (C) 90 (D) 100

हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 2: वर्ग 130-150 का वर्ग चिह्न है :

(A) 130 (B) 135 (C) 140 (D) 145

हल : उत्तर (C)

प्रतिदर्श प्रश्न 3 :एक पासे को 1000 बार फेंका गया और परिणाम निम्नलिखित प्रकार से रिकार्ड किए गए:

परिणाम	1	2	3	4	5	6
बारंबारता	180	150	160	170	150	190

यदि पासे को एक बार और फेंका जाए तो इसकी प्रायिकता कि यह 5 दर्शाएगा:

(A) $\frac{9}{50}$ (B) $\frac{3}{20}$ (C) $\frac{4}{25}$ (D) $\frac{7}{25}$

हल : उत्तर (B)

प्रश्नावली 14.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए –

1. वर्ग 90-120 का वर्ग चिह्न है :

(A) 90 (B) 105 (C) 115 (D) 120

2. 25, 18, 20, 22, 16, 6, 17, 15, 12, 30, 32, 10, 19, 8, 11, 20 आँकड़ों का परिसर है:

(A) 10 (B) 15 (C) 18 (D) 26

3. एक बारंबारता बंटन में, एक वर्ग का मध्य-बिंदु 10 है तथा उसकी चौड़ाई 6 है। इस वर्ग की निम्न सीमा है:

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 12

4. किसी बारंबारता बंटन में पाँच सतत वर्गों में से प्रत्येक की चौड़ाई 5 है तथा सबसे छोटे वर्ग की निम्न सीमा 10 है। सबसे बड़े वर्ग की उपरि सीमा है:

(A) 15 (B) 25 (C) 35 (D) 40

5. मान लीजिए कि एक सतत बारंबारता बंटन में एक वर्ग का मध्य-बिंदु m है और उपरि वर्ग सीमा l है। इस वर्ग की निम्न वर्ग सीमा है:

(A) $2m + l$ (B) $2m - l$ (C) $m - l$ (D) $m - 2l$

6. एक बारंबारता बंटन के वर्ग चिह्न 15, 20, 25, ... हैं। वर्ग चिह्न 20 के संगत वर्ग हैं:

(A) 12.5 – 17.5 (B) 17.5 – 22.5 (C) 18.5 – 21.5 (D) 19.5 – 20.5

7. वर्ग अंतराल 10-20, 20-30, में संख्या 20 निम्नलिखित में सम्मिलित है :

(A) 10-20 (B) 20-30

(C) दोनों अंतरालों में (D) इनमें से किसी में भी नहीं

8. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए, एक अंतराल 250-270 (270 सम्मिलित नहीं) लेते हुए बराबर मापों के वर्ग अंतरालों वाली एक वर्गीकृत बारंबारता सारणी की रचना की जाती है :

268, 220, 368, 258, 242, 310, 272, 342, 310, 290, 300, 320, 319, 304, 402, 318, 406, 292, 354, 278, 210, 240, 330, 316, 406, 215, 258, 236.

वर्ग अंतराल 310-330 की बारंबारता है :

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

9. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए एक वर्ग 63-72 (72 सम्मिलित है) लेते हुए बराबर मापों के वर्ग वाली एक वर्गीकृत बारंबारता सारणी की रचना की जाती है :

30, 32, 45, 54, 74, 78, 108, 112, 66, 76, 88, 40, 14, 20, 15, 35, 44, 66, 75, 84, 95, 96, 102, 110, 88, 74, 112, 14, 34, 44.

इस बंटन में वर्गों की संख्या होगी :

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12

10. बारंबारता बंटन

वर्ग अंतराल	5-10	10-15	15-25	25-45	45-75
बारंबारता	6	12	10	8	15

का एक आयतचित्र खींचने के लिए, वर्ग 25 – 45 की समायोजित बारंबारता है :

(A) 6 (B) 5 (C) 3 (D) 2

11. पाँच संख्याओं का माध्य 30 है। यदि इनमें से एक संख्या को हटा दिया जाए, तो उनका माध्य 28 हो जाता है। हटाई गई संख्या है

(A) 28 (B) 30 (C) 35 (D) 38

12. यदि $x, x+3, x+5, x+7$ प्रेक्षणों और $x+10$ का माध्य 9 है, तो अंतिम तीन प्रेक्षणों का माध्य है

(A) $10\frac{1}{3}$ (B) $10\frac{2}{3}$ (C) $11\frac{1}{3}$ (D) $11\frac{2}{3}$

13. यदि n प्रेक्षण $x_1, x_2, ..., x_n$ के माध्य को $\overline{x}$ से निरूपित किया जाता है, तो $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})$ का मान है:

(A) –1 (B) 0 (C) 1 (D) $n-1$

14. यदि आँकड़ों के प्रत्येक प्रेक्षण में 5 की वृद्धि की जाती है तो उनका माध्य

(A) वही रहता है (B) प्रारंभिक माध्य का पाँच गुना हो जाता है

(C) 5 कम हो जाता है (D) 5 बढ़ जाता है

15. यदि $x_1, x_2, \ldots, x_n$ का माध्य $\overline{x}$ है, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ का माध्य $\overline{y}$ है तथा $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ का माध्य $\overline{z}$ है, तो $\overline{z}$ बराबर है:

(A) $\overline{x}+\overline{y}$ (B) $\frac{\overline{x}+\overline{y}}{2}$ (C) $\frac{\overline{x}+\overline{y}}{n}$ (D) $\frac{\overline{x}+\overline{y}}{2n}$

16. यदि $x_1, x_2, \ldots, x_n$ का माध्य $\overline{x}$ है, तो $a \neq 0$, के लिए $ax_1, ax_2, ..., ax_n, \frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a}, \ldots, \frac{x_n}{a}$ का माध्य है

(A) $\left(a+\frac{1}{a}\right)\overline{x}$ (B) $\left(a+\frac{1}{a}\right)\frac{\overline{x}}{2}$ (C) $\left(a+\frac{1}{a}\right)\frac{\overline{x}}{n}$ (D) $\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)\overline{x}}{2n}$

17. यदि $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \ldots, \overline{x}_n$ क्रमशः प्रेक्षणों की संख्या $n_1, n_2, \ldots, n_n$ वाले n समूहों के माध्य हैं, तो सभी समूहों को मिलाकर लेने पर उनका माध्य $\overline{x}$ निम्नलिखित से प्राप्त होता है:

(A) $\sum_{i=1}^{n} n_i \overline{x}_i$ (B) $\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \overline{x}_i}{n^2}$ (C) $\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \overline{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$ (D) $\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \overline{x}_i}{2n}$

18. 100 प्रेक्षणों का माध्य 50 है। यदि इनमें से एक प्रेक्षण 50 को 150 से प्रतिस्थापित कर दिया जाए तो परिणामी माध्य हो जाएगा :

(A) 50.5 (B) 51 (C) 51.5 (D) 52

19. 50 संख्याएँ दी हुई हैं। इनमें से प्रत्येक संख्या को 53 में से घटाया जाता है तथा इस प्रकार प्राप्त संख्याओं का माध्य –3.5 ज्ञात किया जाता है। दी हुई संख्याओं का माध्य है :

(A) 46.5 (B) 49.5 (C) 53.5 (D) 56.5

20. 25 प्रेक्षणों का माध्य 36 है। इन प्रेक्षणों में से यदि प्रथम 13 प्रेक्षणों का माध्य 32 है तथा अंतिम 13 का माध्य 40 है तो 13वाँ प्रेक्षण है :

(A) 23 (B) 36 (C) 38 (D) 40

21. 78, 56, 22, 34, 45, 54, 39, 68, 54, 84 आँकड़ों का माध्यक है

(A) 45 (B) 49.5 (C) 54 (D) 56

22. एक सतत बारंबारता बंटन का बारंबारता बहुभुज खींचने के लिए, हम उन बिंदुओं को आलेखित करते हैं जिनकी कोटियाँ क्रमशः वर्गों की बारंबारताएँ होती हैं तथा भुज क्रमशः होते हैं

(A) वर्गों की उपरि सीमाएँ (B) वर्गों की निम्न सीमाएँ

(C) वर्गों के वर्ग चिन्ह (D) पिछले वर्गों की उपरि सीमाएँ

23. 4, 4, 5, 7, 6, 7, 7, 12, 3 संख्याओं का माध्यक है :

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

24. 15, 14, 19, 20, 14, 15, 16, 14, 15, 18, 14, 19, 15, 17, 15 आँकड़ों का बहुलक है :

(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17

25. 642 व्यक्तियों पर किए गए एक प्रतिदर्श अध्ययन में यह पाया गया कि 514 व्यक्तियों के पास हाई स्कूल सर्टिफिकेट हैं। यदि इनमें एक व्यक्ति को यादृच्छिक रूप से चुना जाए तो इसकी प्रायिकता कि उस व्यक्ति के पास हाई स्कूल सर्टिफिकेट है:

(A) 0.5 (B) 0.6 (C) 0.7 (D) 0.8

26. 19-36 महीने की आयु वाले 364 बच्चों पर किए गए एक सर्वे में यह पाया गया कि 91 बच्चे आलू के चिप्स खाना पसंद करते हैं। इनमें से एक बच्चा यदि यादृच्छिक (यदृच्छ) रूप से चुना जाता है तो इसकी प्रायिकता कि वह बच्चा आलू के चिप्स पसंद नहीं करेगा, है :

(A) 0.25 (B) 0.50 (C) 0.75 (D) 0.80

27. किसी कक्षा के विद्यार्थियों की एक मेडिकल परीक्षा में निम्नलिखित रक्त समूह रिकार्ड किए गए:

रक्त समूह	A	AB	B	O
विद्यार्थियों का समूह	10	13	12	5

इस कक्षा में से एक विद्यार्थी यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। इस विद्यार्थी का रक्त समूह B होने की प्रायिकता है:

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{13}{40}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{1}{8}$

28. दो सिक्कों को 1000 बार उछाला जाता है और इनके परिणाम निम्नलिखित प्रकार से रिकार्ड किए जाते हैं:

चितों की संख्या	2	1	0
बारंबारता	200	550	250

इस सूचना के आधार पर, अधिकतम एक चित की प्रायिकता है :

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{3}{4}$

29. एक संग्रह में से 80 बल्ब यादृच्छिक रूप से चुने जाते हैं और उनके जीवन कालों (घंटों में) को निम्नलिखित बारंबारता सारणी के रूप में रिकार्ड किया गया :

जीवन काल (घंटों में)	300	500	700	900	1100
बारंबारता	10	12	23	25	10

इस संग्रह में से एक बल्ब यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। इस बल्ब का जीवन काल 1150 घंटा होने की प्रायिकता है :

(A) $\frac{1}{80}$ (B) $\frac{7}{16}$ (C) 0 (D) 1

30. उपरोक्त प्रश्न 29 को देखिए। इस संग्रह में से एक बल्ब यादृच्छय रूप से चुने जाने पर, इसका जीवन काल 900 घंटे से कम होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{11}{40}$ (B) $\frac{5}{16}$ (C) $\frac{7}{16}$ (D) $\frac{9}{16}$

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : आँकड़ों 2, 8, 6, 5, 4, 5, 6, 3, 6, 4, 9, 1, 5, 6, 5 का माध्य 5 दिया गया है। इस सूचना के आधार पर क्या यह कहना सही है कि 10, 12, 10, 2, 18, 8, 12, 6, 12, 10, 8, 10, 12, 16, 4 आँकड़ों का माध्य 10 है? कारण दीजिए।

हल : यह सही है। क्योंकि दूसरे आँकड़ों में प्रत्येक प्रेक्षण पहले आँकड़ों के प्रत्येक प्रेक्षण को 2 से गुणा करके प्राप्त किया गया है, इसलिए माध्य पहले आँकड़ों के माध्य का दुगुना होगा।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : एक आयतचित्र में आयतों के क्षेत्रफल बारंबारताओं के समानुपाती हैं। क्या आप कह सकते हैं कि आयतों की लंबाइयाँ भी बारंबारताओं के समानुपाती हैं?

हल : नहीं। यह तभी सत्य होगा, जब सभी वर्गमाप बराबर हों।

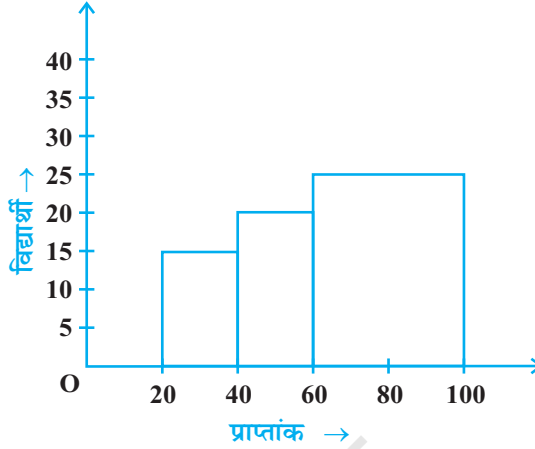
प्रतिदर्श प्रश्न 3 : आँकड़ों 2, 3, 9, 16, 9, 3, 9 पर विचार कीजिए। क्योंकि सबसे बड़ा मान 16 है, तो क्या यह कहना सही है कि आँकड़ों का बहुलक 16 है? कारण दीजिए।

हल : इन आँकड़ों का बहुलक 16 नहीं है। दिए हुए आँकड़ों का बहुलक अधिकतम बारंबारता वाला प्रेक्षण होता है न कि अधिकतम मान वाला प्रेक्षण।

प्रश्नावली 14.2

1. बारंबारता सारणी

प्राप्तांक	0-20	20-40	40-60	60-100
विद्यार्थियों की संख्या	10	15	20	25

को आलेखीय रूप से नीचे दर्शाए अनुसार निरूपित किया गया है :

आकृति 14.1

क्या आप सोचते हैं कि यह निरूपण सही है? क्यों?

2. विद्यार्थियों को दिए गए गणित के एक निदानात्मक टेस्ट में (100 में से) उनके द्वारा प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित रूप में रिकार्ड किए गए :

46, 52, 48, 11, 41, 62, 54, 53, 96, 40, 98, 44

उपरोक्त आँकड़ों के लिए कौन-सा 'औसत' एक अच्छा प्रतिनिधित्व करेगा और क्यों?

3. एक बच्चा कहता है कि 3, 14, 18, 20, 5 का माध्यक 18 है। यह बच्चा माध्यक ज्ञात करने के बारे में क्या नहीं जानता है?

4. फुटबाल के एक खिलाड़ी द्वारा 10 मैचों में किए गए गोलों की संख्या निम्नलिखित है:

1, 3, 2, 5, 8, 6, 1, 4, 7, 9

क्योंकि मैचों की संख्या 10 (एक सम संख्या) है, इसलिए

$$\text{माध्यक} = \frac{5^{\text{वाँ}} \text{ प्रेक्षण} + 6^{\text{वाँ}} \text{ प्रेक्षण}}{2} = \frac{8+6}{2} = 7$$

क्या यह सही उत्तर है और क्यों?

5. क्या यह कहना सही है कि आयतचित्र में प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल संगत वर्ग अंतराल की माप के समानुपाती होता है? यदि नहीं, तो कथन को सही रूप में लिखिए।

6. एक सतत बंटन के वर्ग चिह्न निम्नलिखित हैं :

1.04, 1.14, 1.24, 1.34, 1.44, 1.54 और 1.64

क्या यह कहना सही है कि अंतिम अंतराल 1.55 - 1.73 होगा ? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

7. 30 बच्चों से पूछा गया कि उन्होंने पिछले सप्ताह कितने घंटे टी.वी. के प्रोग्राम देखे। इसके परिणाम निम्नलिखित रूप में रिकार्ड किए गए :

घंटों की संख्या	0-5	5-10	10-15	15-20
बारंबारता	8	16	4	2

क्या हम कह सकते हैं कि उस सप्ताह में 10 या उससे अधिक घंटों तक टी वी देखने वाले बच्चों की संख्या 22 है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए ।

8. क्या किसी घटना की प्रायोगिक प्रायिकता एक ऋणात्मक संख्या हो सकती है? यदि नहीं, तो क्यों?

9. क्या किसी घटना की प्रायोगिक प्रायिकता 1 से अधिक हो सकती है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

10. जैसे-जैसे एक सिक्के के उछालों की संख्या बढ़ती जाती है, चितों की संख्या और पटों की संख्या का अनुपात $\frac{1}{2}$ हो जाता है। क्या यह सही है? यदि नहीं, तो इसे सही रूप में लिखिए।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : कक्षा IX की 30 लड़कियों की लंबाई (cm में) नीचे दी गई हैं:

140, 140, 160, 139, 153, 153, 146, 150, 148, 150, 152, 146, 154, 150, 160, 148, 150, 148, 140, 148, 153, 138, 152, 150, 148, 138, 152, 140, 146, 148.

इन आँकड़ों के लिए एक बारंबारता बंटन सारणी तैयार कीजिए।

हल : 30 लड़कियों की लंबाइयों का बारंबारता बंटन

लंबाई (cm में)	**मिलान चिह्न**	**बारंबारता**
138	||	2
139	|	1
140	||||	4
146	|||	3
148	~~||||~~ |	6
150	~~||||~~	5
152	|||	3
153	|||	3
154	|	1
160	||	2
	योग	**30**

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : निम्नलिखित आँकड़े आरोही क्रम में व्यवस्थित है:

26, 29, 42, 53, x, $x + 2$, 70, 75, 82, 93

यदि इनका माध्यक 65 है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : प्रेक्षणों की संख्या $(n) = 10$ है जो एक सम संख्या है।

अतः, माध्यक $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{वें}}$ और $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{वें}}$ अर्थात् $5^{\text{वें}}$ और $6^{\text{वें}}$ पदों का माध्य होगा।

यहाँ $5^{\text{वाँ}}$ प्रेक्षण $= x$ और

$6^{\text{वाँ}}$ प्रेक्षण $= x + 2$ है।

अतः, माध्यक $= \dfrac{x+(x+2)}{2} = x+1$

अब, $x + 1 = 65$ (दिया है)

अतः, $x = 64$

अर्थात्, x का मान 64 है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : यहाँ एक जन्म-मृत्यु दर सारणी का एक अंश दिया गया है:

आयु (वर्षों में)	एक मिलियन के प्रतिदर्श (जनसंख्या) में से जीवित बचने वाले व्यक्तियों की संख्या
60	16090
61	11490
62	8012
63	5448
64	3607
65	2320

(i) इस सूचना के आधार पर, 60 वर्ष की आयु के व्यक्ति की एक वर्ष के अंदर मृत्यु हो जाने की प्रायिकता क्या है?

(ii) इसकी प्रायिकता क्या है कि 61 वर्ष की आयु वाला व्यक्ति 4 वर्ष तक जीवित रहेगा?

हल :

(i) हम देखते हैं कि 60 वर्ष की आयु वाले कुल 16090 व्यक्तियों में से (16090 – 11490), अर्थात् 4600 व्यक्ति 61वें वर्ष के होने से पहले ही मर जाते हैं।

अत:, P(60 वर्ष की आयु के व्यक्ति की एक वर्ष के अंदर मृत्यु) = $\frac{4600}{16090} = \frac{460}{1609}$

(ii) 61 वर्ष की आयु वाले व्यक्तियों की संख्या = 11490

इनमें से 4 वर्ष तक जीवित बचने वाले व्यक्तियों की संख्या = 2320

अत:, P(61 वर्ष की आयु का व्यक्ति 4 वर्ष तक जीवित बचेगा) = $\frac{2320}{11490} = \frac{232}{1149}$

प्रश्नावली 14.3

1. 30 विद्यार्थियों के रक्त समूह निम्नलिखित रूप में रिकार्ड किए गए :

A, B, O, A, AB, O, A, O, B, A, O, B, A, AB, B, A, AB, B,
A, A, O, A, AB, B, A, O, B, A, B, A

इन आँकड़ों के लिए एक बारंबारता बंटन सारणी तैयार कीजिए।

2. π का मान 35 दशमलव स्थानों तक नीचे दिया गया है :

3.14159265358979323846264338327950288

दशमलव बिंदु के बाद आने वाले 0 से 9 अंकों तक की एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

3. गणित के एक टेस्ट में, 33 विद्यार्थियों द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित हैं:

69, 48, 84, 58, 48, 73, 83, 48, 66, 58, 84, 66, 64, 71, 64, 66, 69, 66, 83, 66, 69, 71, 81, 71, 73, 69, 66, 66, 64, 58, 64, 69, 69

इन आँकड़ों को एक बारंबारता बंटन द्वारा निरूपित कीजिए।

4. निम्नलिखित आँकड़ों से एक सतत बारंबारता बंटन तैयार कीजिए :

मध्य-बिंदु	बारंबारता
5	4
15	8
25	13
35	12
45	6

वर्ग अंतरालों के माप भी ज्ञात कीजिए।

5. दिए हुए बारंबारता बंटन को एक सतत वर्गीकृत बंटन में बदलिए :

वर्ग-अंतराल	बारंबारता
150-153	7
154-157	7
158-161	15
162-165	10
166-169	5
170-173	6

किन अंतरालों में 153.5 और 157.5 सम्मिलित किए जाएंगे?

6. किसी महीने में एक परिवार द्वारा विभिन्न मदों पर किए गए व्यय निम्नलिखित हैं :

मद	भोजन	शिक्षा	कपड़े	मकान किराया	अन्य	बचत
व्यय (रु में)	4000	2500	1000	3500	2500	1500

उपरोक्त को निरूपित करने के लिए एक दंड आलेख खींचिए।

7. किसी देश द्वारा शिक्षा पर पाँच वर्षों के एक अंतराल (2002-2006) में किए गए व्यय (करोड़ रुपयों में) नीचे दिए गए हैं :

प्रारंभिक शिक्षा	240
माध्यमिक शिक्षा	120
विश्वविद्यालयी शिक्षा	190
अध्यापक प्रशिक्षण	20
सामाजिक शिक्षा	10
अन्य शैक्षिक प्रोग्राम	115
सांस्कृतिक प्रोग्राम	25
तकनीकी शिक्षा	125

उपरोक्त सूचना को एक दंड आलेख से निरूपित कीजिए।

8. निम्नलिखित सारणी किसी पुस्तक के एक पृष्ठ पर अधिकांशतः प्रयुक्त किए गए a, e, i, o, r, t और u अक्षरों की बारंबारताएँ दर्शा रही है :

अक्षर	a	e	i	o	r	t	u
बारंबारताएँ	75	125	80	70	80	95	75

उपरोक्त सूचना को एक दंड आलेख से निरूपित कीजिए।

9. यदि निम्नलिखित आँकड़ों का माध्य 20.2 है, तो p का मान ज्ञात कीजिए :

x	10	15	20	25	30
f	6	8	p	10	6

10. निम्नलिखित बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए :

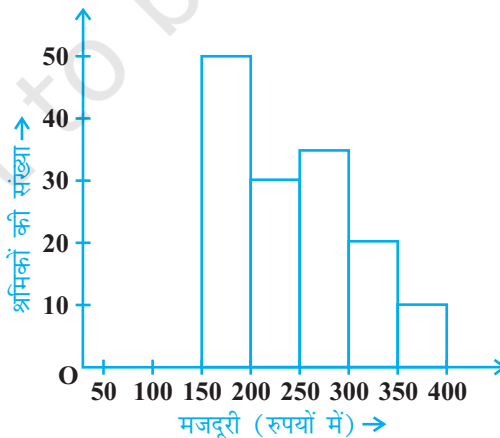
बारंबारताएँ	चर
4	4
8	6
14	8
11	10
3	12

11. एक कक्षा में 50 विद्यार्थी हैं, जिनमें से 30 लड़कियाँ हैं। एक टेस्ट में लड़कियों द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंकों का माध्य 73 तथा लड़कों का 71 है। संपूर्ण कक्षा के माध्य प्राप्तांक ज्ञात कीजिए।

12. 50 प्रेक्षणों का माध्य 80.4 प्राप्त हुआ। परंतु बाद में यह ज्ञात हुआ कि एक स्थान पर 96 को 69 पढ़ लिया गया है। सही माध्य ज्ञात कीजिए।

13. दस प्रेक्षणों 6, 14, 15, 17, $x + 1$, $2x – 13$, 30, 32, 34 और 43 को आरोही क्रम में लिखा गया है। इन आँकड़ों का माध्यक 24 है। x का मान ज्ञात कीजिए।

14. किसी बास्केट बॉल टीम द्वारा मैचों की एक शृंखला में निम्नलिखित प्वाइंट अर्जित किए गए:
17, 2, 7, 27, 25, 5, 14, 18, 10, 24, 48, 10, 8, 7, 10, 28
इन आँकड़ों के लिए माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

15. आकृति 14.2 में, एक आयतचित्र दिया है जो किसी फैक्ट्री की श्रमिकों की दैनिक मजदूरी दर्शाता है। इसके लिए एक बारंबारता बंटन सारणी की रचना कीजिए।

आकृति 14.2

16. एक कंपनी ने 4000 परिवारों को यादृच्छिक रूप से चुना तथा उनके आय स्तर और घर में स्थित टी.वी. सेटों की संख्या में संबंध ज्ञात करने हेतु एक सर्वेक्षण किया। इस प्रकार प्राप्त सूचनाओं को निम्नलिखित सारणी के रूप में सूचीबद्ध किया गया है :

मासिक आय (रु में)	टी.वी. सेटों/परिवारों की संख्या			
	0	1	2	2 से अधिक
< 10000	20	80	10	0
10000 - 14999	10	240	60	0
15000 - 19999	0	380	120	30
20000 - 24999	0	520	370	80
25000 और उससे अधिक	0	1100	760	220

निम्नलिखित की प्रायिकता ज्ञात कीजिए –

(i) एक परिवार की आय 10000 रु – 14999 रु होने और घर में ठीक एक टी.वी. सेट होना

(ii) एक परिवार की आय 25000 रु और उससे अधिक होना और घर में दो टी.वी. सेट होना।

(iii) एक परिवार में एक भी टी.वी. सेट नहीं होना।

17. दो पासों को एक साथ 500 बार फेंका जाता है। प्रत्येक बार उनके ऊपर आई संख्याओं के योग को ज्ञात करके नीचे दी गई सारणी के अनुसार रिकार्ड किया गया है:

योग	बारंबारता
2	14
3	30
4	42
5	55
6	72
7	75
8	70
9	53
10	46
11	28
12	15

यदि इन पासों को एक बार पुन: फेंका जाए तो निम्नलिखित योग ज्ञात करने की क्या प्रायकिता है?

(i) 3 (ii) 10 से अधिक

(iii) 5 से कम या उसके बराबर (iv) 8 और 12 के बीच

18. पैक किए गए प्रत्येक डिब्बे में बल्बों की संख्या 40 है। इनमें से 700 डिब्बों के खराब बल्बों की संख्या ज्ञात करने के लिए जाँच की गई तथा इसके परिणाम निम्नलिखित सारणी में दिए गए हैं:

खराब बल्बों की संख्या	0	1	2	3	4	5	6	6 से अधिक
बारंबारता	400	180	48	41	18	8	3	2

इन डिब्बों में से एक डिब्बा यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि इस डिब्बे में

(i) कोई बल्ब खराब नहीं होगा?
(ii) खराब बल्बों की संख्या 2 से 6 तक होगी?
(iii) 4 से कम खराब बल्ब होंगे?

19. पिछले 200 कार्य दिवसों में, किसी मशीन द्वारा निर्मित खराब पुर्जो की संख्या निम्नलिखित सारणी में दी गई है :

खराब पुर्जो की संख्या	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
दिन	50	32	22	18	12	12	10	10	10	8	6	6	2	2

इसकी प्रायिकता निर्धारित कीजिए कि कल के उत्पादन में

(i) कोई खराब पुर्जा नहीं होगा। (ii) न्यूनतम एक खराब पुर्जा होगा।
(iii) 5 से अधिक खराब पुर्जे नहीं होंगे। (iv) 13 से अधिक खराब पुर्जे होंगे।

20. कुछ समय पहले ही किए गए एक सर्वे मे यह पाया गया कि एक फैक्ट्री के श्रमिकों की आयु का बंटन निम्नलिखित है :

आयु (वर्षों में)	20 - 29	30 - 39	40 - 49	50 - 59	60 और उससे ऊपर
श्रमिकों की संख्या	38	27	86	46	3

यदि इनमें से एक व्यक्ति यादृच्छिक रूप से चुना जाता है तो इसकी क्या प्रायिकता है कि वह व्यक्ति

(i) 40 वर्ष या उससे अधिक आयु का होगा?
(ii) 40 वर्ष से कम आयु का होगा?
(iii) 30 और 39 वर्ष के बीच की आयु का होगा?
(iv) 60 वर्ष से कम आयु का होगा परंतु 39 वर्ष से अधिक होगा?

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: कक्षा VIII के विभिन्न अनुभागों (सेक्शनों) के विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का बंटन निम्नलिखित है :

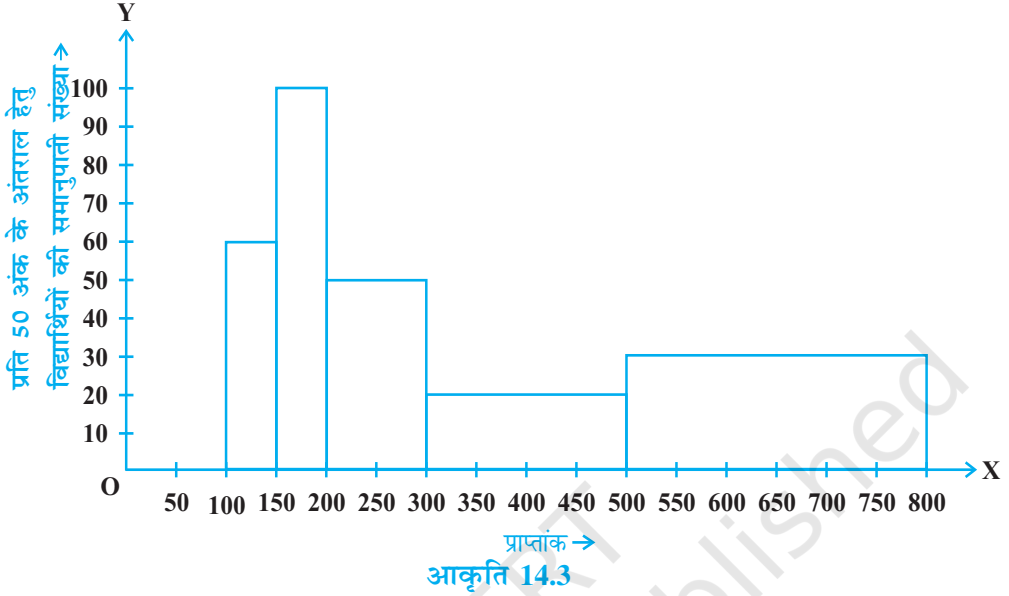
प्राप्तांक	100 - 150	150 - 200	200 - 300	300 - 500	500 - 800
विद्यार्थियों की संख्या	60	100	100	80	180

उपरोक्त बंटन के लिए एक आयतचित्र खींचिए।

हल : उपरोक्त बारंबारता बंटन सारणी में वर्ग अंतराल बराबर चौड़ाई के नहीं हैं। अत: हम आयतचित्र में आयतों की लंबाइयों में उपयुक्त संशोधन करेंगे ताकि आयतों के क्षेत्रफल बारंबारताओं के समानुपाती हो जाएँ। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है :

प्राप्तांक	बारंबारता	वर्ग की चौड़ाई	आयत की लंबाई
100 - 150	60	50	$\frac{50}{50}\times 60 = 60$
150 - 200	100	50	$\frac{50}{50}\times 100 = 100$
200 - 300	100	100	$\frac{50}{100}\times 100 = 50$
300 - 500	80	200	$\frac{50}{200}\times 80 = 20$
500 - 800	180	300	$\frac{50}{300}\times 180 = 30$

अब, हम अंतिम स्तंभ में दी लंबाइयों वाले आयत खींच कर नीचे दर्शाया हुआ आयतचित्र खींचते है:

आकृति 14.3

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : कक्षा IX के दो अनुभागों के विद्यार्थी, जिनमें से प्रत्येक में 30 विद्यार्थी हैं, एक गणित ओलंपियाड की परीक्षा में बैठते हैं। उनके द्वारा प्राप्त किए गए अंक इस प्रकार हैं:

46	31	74	68	42	54	14	61	83	48	37	26	8	64	57
93	72	53	59	38	16	88	75	56	46	66	45	61	54	27
27	44	63	58	43	81	64	67	36	49	50	76	38	47	55
77	62	53	40	71	60	58	45	42	34	46	40	59	42	29

वर्ग 0-9, 10-19, इत्यादि का प्रयोग करते हुए, उपरोक्त आँकड़ों के लिए एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाइए तथा फिर उन विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए, जिन्होंने 49 से अधिक अंक प्राप्त किए हैं।

हल :

वर्ग	मिलान चिह्न	बारंबारता
0-9	|	1
10-19	||	2
20-29	||||	4
30-39	~~||||~~ |	6
40-49	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~	15
50-59	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12
60-69	~~||||~~ ~~||||~~	10
70-79	~~||||~~ |	6
80-89	|||	3
90-99	|	1
	योग	**60**

उपरोक्त सारणी से, हम प्राप्त करते हैं कि 49 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या (12 + 10 + 6 + 3 + 1) = 32 है।

प्रश्नावली 14.4

1. 60 विद्यार्थियों के गणित में (100 में से)प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित हैं :

16, 13, 5, 80, 86, 7, 51, 48, 24, 56, 70, 19, 61, 17, 16, 36, 34, 42, 34, 35, 72, 55, 75, 31, 52, 28,72, 97, 74, 45, 62, 68, 86, 35, 85, 36, 81, 75, 55, 26, 95, 31, 7, 78, 92, 62, 52, 56, 15, 63,25, 36, 54, 44, 47, 27, 72, 17, 4, 30.

वर्ग 0 - 9 से प्रारंभ करते हुए और प्रत्येक वर्ग की चौड़ाई 10 रखते हुए, एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

2. उपरोक्त प्रश्न 1 को देखिए। इसके लिए प्रत्येक वर्ग की चौड़ाई 10 रखते हुए एक वर्गीकृत बारंबारता सारणी इस प्रकार बनाइए कि इसमें एक वर्ग 10 - 20 (20 सम्मिलित नहीं) हो।

3. निम्नलिखित बंटन के लिए एक आयतचित्र खींचिए :

ऊँचाई (cm में)	विद्यार्थियों की संख्या
150 - 153	7
153 - 156	8
156 - 159	14
159 - 162	10
162 - 165	6
165 - 168	5

4. निम्नलिखित वर्गीकृत बारंबारता बंटन को निरूपित करने के लिए एक आयतचित्र खींचिए :

आयु (वर्षों में)	शिक्षकों की संख्या
20 - 24	10
25 - 29	28
30 - 34	32
35 - 39	48
40 - 44	50
45 - 49	35
50 - 54	12

5. किसी पौधे की 62 पत्तियों की लंबाइयाँ मिलिमीटरों में मापी जाती है तथा इससे प्राप्त आँकड़े नीचे दी सारणी द्वारा निरूपित हैं :

लंबाई (mm में)	पत्तियों की संख्या
118 - 126	8
127 - 135	10
136 - 144	12
145 - 153	17
154 - 162	7
163 - 171	5
172 - 180	3

उपरोक्त आँकड़ों को निरूपित करने के लिए एक आयतचित्र खींचिए।

6. एक कक्षा के 80 विद्यार्थियों द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित हैं :

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
10 - 20	6
20 - 30	17
30 - 50	15
50 - 70	16
70 - 100	26

उपरोक्त आँकड़ों को निरूपित करने के लिए एक आयतचित्र खींचिए।

7. निम्नलिखित सारणी एक राजमार्ग पर किसी स्थान से होकर जाने वाली कारों की चालों के बारंबारता बंटन को दर्शाती है :

वर्ग अंतराल (km/h में)	बारंबारता
30 - 40	3
40 - 50	6
50 - 60	25
60 - 70	65
70 - 80	50
80 - 90	28
90 - 100	14

उपरोक्त आँकड़ों के लिए एक आयतचित्र और एक बारंबारता बहुभुज खींचिए।

8. उपरोक्त प्रश्न 7 को देखिए। इन आँकड़ों को निरूपित करने के लिए बिना आयतचित्र खींचे एक बारंबारता बहुभुज खींचिए।

9. निम्नलिखित सारणी किसी कक्षा के अनुभागों A और B द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का बंटन दर्शाती है :

अनुभाग A		अनुभाग B	
प्राप्तांक	**बारंबारता**	**प्राप्तांक**	**बारंबारता**
0 - 15	5	0 - 15	3
15 - 30	12	15 - 30	16
30 - 45	28	30 - 45	25
45 - 60	30	45 - 60	27
60 - 75	35	60 - 75	40
75 - 90	13	75 - 90	10

इन दोनों अनुभागों के विद्यार्थियों के प्राप्तांकों को एक ही आलेख कागज पर दो बारंबारता बहुभुजों से निरूपित कीजिए। आप क्या देखते हैं?

10. निम्नलिखित बंटन का माध्य 50 है।

x	f
10	17
30	$5a + 3$
50	32
70	$7a - 11$
90	19

a का मान ज्ञात कीजिए और फिर 30 और 70 की बारंबारता ज्ञात कीजिए।

11. किसी परीक्षा में लड़के और लड़कियों के (100 में से) प्राप्त अंकों के माध्य क्रमश: 70 और 73 हैं। यदि इसी परीक्षा में, सभी विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का माध्य 71 है, तो लड़के और लड़कियों की संख्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

12. एक अस्पताल में, ब्लड शुगर के स्तर (mg/dl) की जाँच के लिए 25 रोगी भर्ती किए गए तथा प्राप्त परिणाम निम्नलिखित रहे :

87	71	83	67	85
77	69	76	65	85
85	54	70	68	80
73	78	68	85	73
81	78	81	77	75

उपरोक्त आँकड़ों का माध्य, माध्यक और बहुलक (mg/dl) ज्ञात कीजिए।